第７講　楕円と接線，不等式が成り立つ条件，回転体の体積

19　xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする．

$$x^2+4y^2=1,\ x>0,\ y>0$$

Ｐを C 上の点とする．Ｐで C に接する直線を l とし，Ｐを通り l と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする．Ｐが C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときのＰの座標を求めよ．

《15 東北大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

20　$t>0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件(ア)(イ)を満たす.

(ア)　$t>0$ のとき，すべての実数 x に対して不等式

$$t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)\geqq 1+x$$

が成り立つ.

(イ)　$t>0$ に対して，等式

$$t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)=1+x$$

を満たす実数 x が存在する.

このとき，$f(t)$ を求めよ.

《14 阪大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

21 関数 $f(x)=x-\sin x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える．曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが $\dfrac{1}{2}$ となるものを l とする．

(1) l の方程式と接点の座標 $(a,\ b)$ を求めよ．

(2) a は(1)で求めたものとする．曲線 $y=f(x)$，直線 $x=a$，および x 軸で囲まれた領域を，x 軸のまわりに１回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

《14 九大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　楕円と接線，不等式が成り立つ条件，回転体の体積

19 xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする．

$$x^2+4y^2=1,\ x>0,\ y>0$$

Ｐを C 上の点とする．Ｐで C に接する直線を l とし，Ｐを通り l と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする．Ｐが C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときのＰの座標を求めよ．

《15 東北大・理系》

【答】 最大値 $\dfrac{9}{32}$　　$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

【解説】 $C:x^2+\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$ で $x>0$，$y>0$ より，$\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{2}\sin\theta\right)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表すことができるので，直線 l の方程式は $(\cos\theta)x+4\cdot\dfrac{\sin\theta}{2}\cdot y=1$ つまり $(\cos\theta)x+(2\sin\theta)y=1$ と表せる．

よって直線 m の方程式は $(2\sin\theta)(x-\cos\theta)-(\cos\theta)\left(y-\dfrac{\sin\theta}{2}\right)=0$

ゆえに $(2\sin\theta)x-(\cos\theta)y-\dfrac{3}{2}\sin\theta\cos\theta=0$

よって m と x 軸，y 軸との共有点は $\left(\dfrac{3}{4}\cos\theta,\ 0\right)$，$\left(0,\ -\dfrac{3}{2}\sin\theta\right)$ となるので

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left|\frac{3}{4}\cos\theta\right|\left|-\frac{3}{2}\sin\theta\right| \\ &= \frac{9}{16}\sin\theta\cos\theta \\ &= \frac{9}{32}\sin 2\theta \end{aligned}$$

ここで $0<2\theta<\pi$ より $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ゆえに $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときに S は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{32}}$ をとり，

このときＰの座標は $\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}\right)$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

20　$t>0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件(ア)(イ)を満たす．

(ア)　$t>0$ のとき，すべての実数 x に対して不等式

$$t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)\geqq 1+x$$

が成り立つ．

(イ)　$t>0$ に対して，等式

$$t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)=1+x$$

を満たす実数 x が存在する．

このとき，$f(t)$ を求めよ．

《14 阪大・理系》

【答】　$f(t)=1+\log\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}-\sqrt{1+t^2}$

【解説】　$g(x)=t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)-(1+x)$ とおくと，すべての実数 x について $g(x)\geqq 0$ で，$g(x)=0$ となる x が存在すればよい．つまり $g(x)$ の最小値が 0 となればよい．

$g'(x)=t\cdot\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}-1=\dfrac{te^{-x}}{2}\left(e^x-\dfrac{1-\sqrt{1+t^2}}{t}\right)\left(e^x-\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}\right)$ より，$g(x)$ の増減は

x	$\cdots$	$\log\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↗

となるので $g\left(\log\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}\right)=0$ であればよい．

ここで $x=\log\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$ は $e^x=\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$ を満たすので，

$$e^{-x}=\frac{1}{\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}}=-\frac{1-\sqrt{1+t^2}}{t}$$

$$\begin{aligned}g\left(\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}\right)&=t\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}-\frac{1-\sqrt{1+t^2}}{t}\right)+f(t)-\left(1+\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}\right)\\&=\sqrt{1+t^2}+f(t)-1-\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}\end{aligned}$$

となり，これが 0 なので，$\boldsymbol{f(t)=1+\log\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}-\sqrt{1+t^2}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[21] 関数 $f(x)=x-\sin x\ \left(0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える．曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが $\dfrac{1}{2}$ となるものを l とする．

(1) l の方程式と接点の座標 $(a,\ b)$ を求めよ．

(2) a は(1)で求めたものとする．曲線 $y=f(x)$，直線 $x=a$，および x 軸で囲まれた領域を，x 軸のまわりに１回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

《14 九大・理系》

【答】 (1) $l：y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$(a,\ b)=\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) $\pi\left(\dfrac{\pi^3}{81}+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{9}{8}\sqrt{3}\right)$

【解説】 (1) $f'(x)=1-\cos x=\dfrac{1}{2}$ より $x=\dfrac{\pi}{3}$．よって l は $y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{3}$

つまり $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$．

　このときの接点は $\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$．

(2)

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\pi(x-\sin x)^2\,dx \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x^2-2x\sin x+\sin^2 x)\,dx \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(x^2-2x\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx \\
&= \pi\left[\frac{x^3}{3}+2(x\cos x-\sin x)+\frac{2x-\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \boldsymbol{\pi\left(\frac{\pi^3}{81}+\frac{\pi}{2}-\frac{9}{8}\sqrt{3}\right)}
\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。